



TITLE:

非線型性と偶然性 (連続体力学における非線型方程式の近似解法)

AUTHOR(S):

佐藤, 浩; 斉藤, 博之助; 本橋, 龍郎

CITATION:

佐藤, 浩 ...[et al]. 非線型性と偶然性 (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1975, 244: 90-103

ISSUE DATE:

1975-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105613>

RIGHT:

非線型性と偶然性

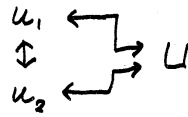
東大宇宙航空研究所

佐藤 浩, 斎藤博之助, 本橋龍郎

1. はしり

流体運動は複雑な非線型システムである。その中でいろいろな波を誘起してその非線型干渉を調べることができる。多くの非線型系がそうであるように流れの中においても波はその振巾が小さい間は波長や振動数に応じた指数的な増巾や減衰を受ける。そして振巾がある値より大きくなると非線型干渉が始まる。即ち、高調波の発生、振動数の和や差の成分の生成、などがおきる。また、はじめの波が周期的な成分と偶然成分とからなっている場合には干渉によって偶然成分が増大して乱流が形成される。

流体運動において特徴的なことは、2つ以上の波 u_1, u_2, \dots が干渉するとき、もう1つの要素として時間平均量、即ち主流 U が存在することである。そこで2つの波の場合



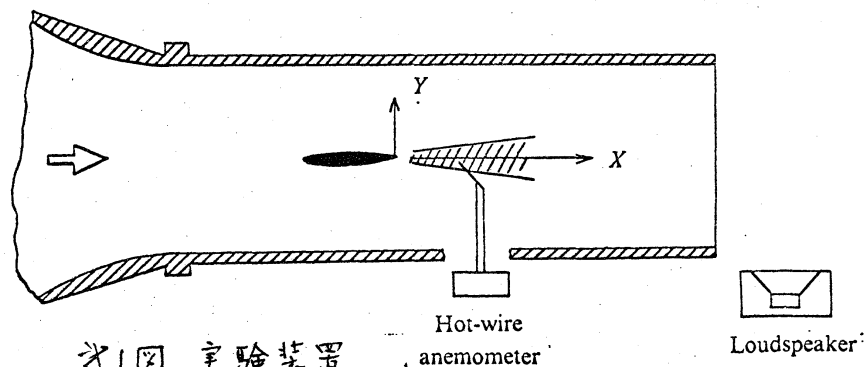
のように3種類の干渉がおきる。そしてどれかの干渉が強く、どれかが弱いということがある。そこで実験的にこれらの干渉のありさまを調べ、何か一般的な結論を得ることを試みた。

流れ場としてはうすい物体のうしろの二次元後流をえらぶ。これは管流や境界層とちがって、強い線型不安定領域とそれに続くゆるやかな非線型領域を持っている。この領域は波長の数十倍という広さを持っており、非線型干渉を調べるには都合がよい。また、固体境界が無いので複雑な構造を持つ粘性底層に悩まされることもない。

2. 第1次波の成長と減衰

人工的に流れの中に導入され、線型過程では成長する2つの波が非線型性によってどのように干渉し合うかということを知る。

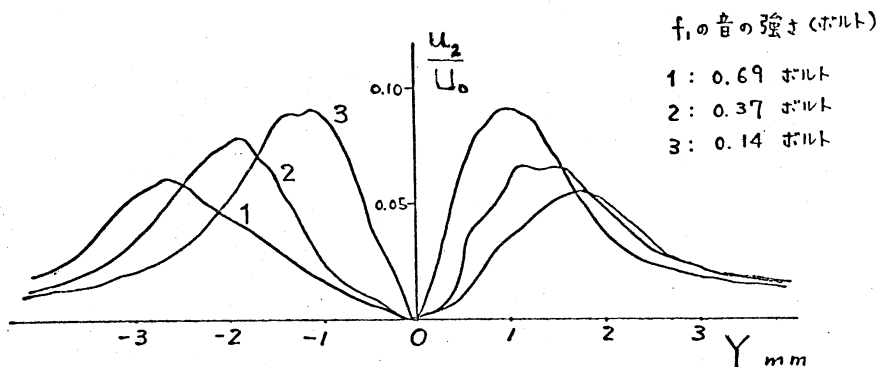
第1図は実験装置で、乱れの弱い風洞の中に一様な流れ



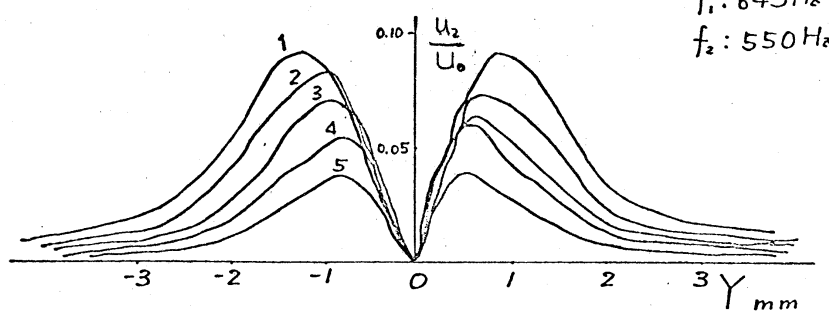
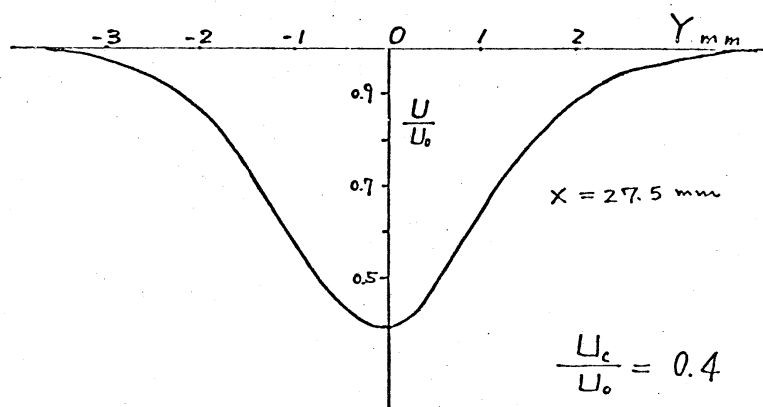
第1図 実験装置

に平行に置かれた薄い板の後流を熱線風速計によって調べる。
 人工的攪乱としては、下流におかれたスピーカークラウド2つの
 混合された音
 を入れる。音
 によって誘起
 された速度変
 動は後流の中
 で成長する。
 実験はすべて
 一樣流速 $U_0 = 10 \text{ m/s}$ でおこな
 われた。

干渉の1つ
 の例を第2図
 に示す。これは板の後縁か
 らの距離 X が
 32.5 mm の場所
 における板に
 直角な Y 方向
 の分布で、 f_1



★2図 成長抑制 $X = 32.5 \text{ mm}$



★3図 f_2 成分の発達

- 1: $X = 32.5 \text{ mm}$
- 2: $X = 30.0 \text{ mm}$
- 3: $X = 27.5 \text{ mm}$
- 4: $X = 25.0 \text{ mm}$
- 5: $X = 22.5 \text{ mm}$

と f_2 という 2 つの音のうち、 f_1 の音の強さを 3 種類に変えたときの f_2 の周波数の速度成分の rms 値を U_0 で無次元化したものである。これを見てわかることは f_2 成分の音の強さは一定であるにもかかわらず f_1 の音を強くする ($3 \rightarrow 1$) ことによって U_2 が減少することである。このようなことは f_1 と f_2 を逆にしても起り、我々はこれを“成長抑制”と呼んでいる。これは非線型干渉のうち最も単純な素過程である。我々はこの干渉は次のようなプロセスでおきるのであろうかと考えた。

$$U_1 \longleftrightarrow U \longleftrightarrow U_2$$

即ち、 U_1 と U_2 の間には直接干渉がなくすべては U を経由する。もしそうであれば U_1 の周波数や振巾はどのようなであれ、 U が同じであれば U_2 の成長のしかたは同じになるはずである。 U を特徴づけるものは $Y=0$ (中心軸上) における U の値、 U_c である。そこでいろいろな U_c のとき U_2 の成長を調べることにした。第 3 図は $f_1 = 645 \text{ Hz}$ 、 $f_2 = 550 \text{ Hz}$ で、 f_1 成分の強さを調節して $X = 27.5 \text{ mm}$ において $U_c/U_0 = 0.9$ となるようにしたときの f_2 成分の流れ方向への発達 ($5 \rightarrow 1$) のありさまである。 U の分布を上方に示した。 U_2 は $X = 22.5 \text{ mm}$ から 32.5 mm の間に 2 倍以上に成長している。第 4 図は同じ条件だが f_1 成分を強くして $U_c/U_0 = 0.6$ としたときの結果で、 U_2 は流れ方向にほとんど成長しない。このような実験を f_1 も変えて行い、 $X = 27.5$

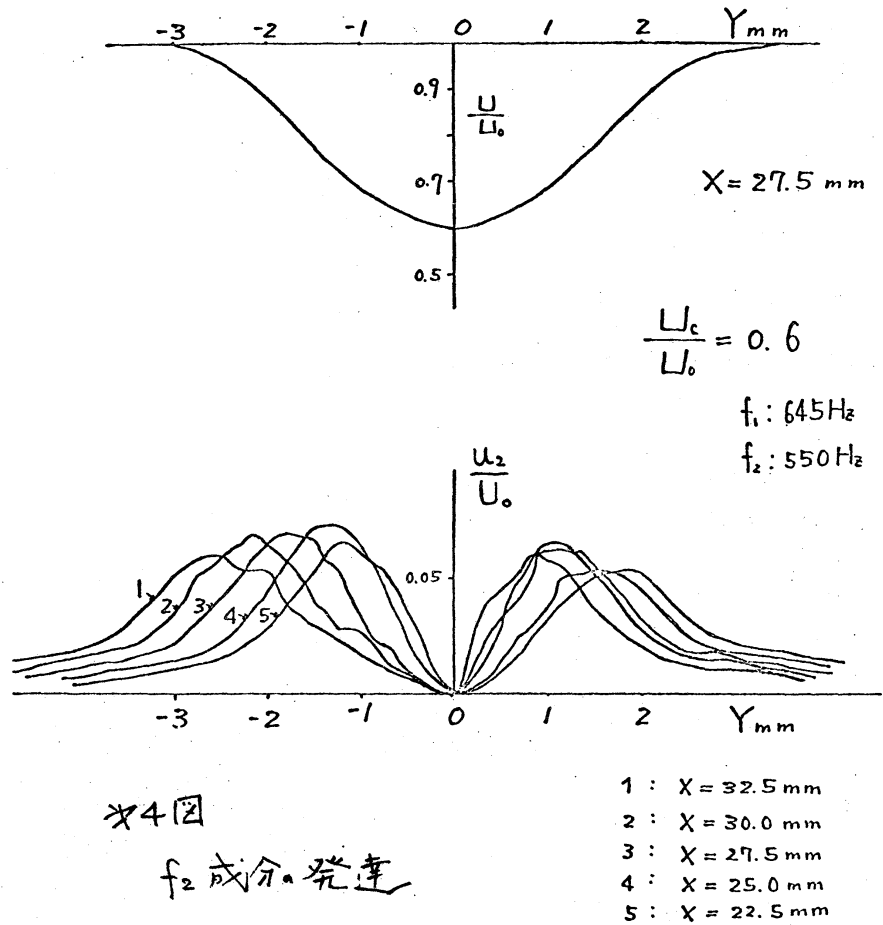
mmにおいて

$$u_2 \sim e^{\gamma_2 x}$$

のようにあらわしたときの γ_2 を3種類の U_c/U_0 について求めた結果が第5図である。これを見ると γ_2 は f_1 の値、 u_2 の大きさ

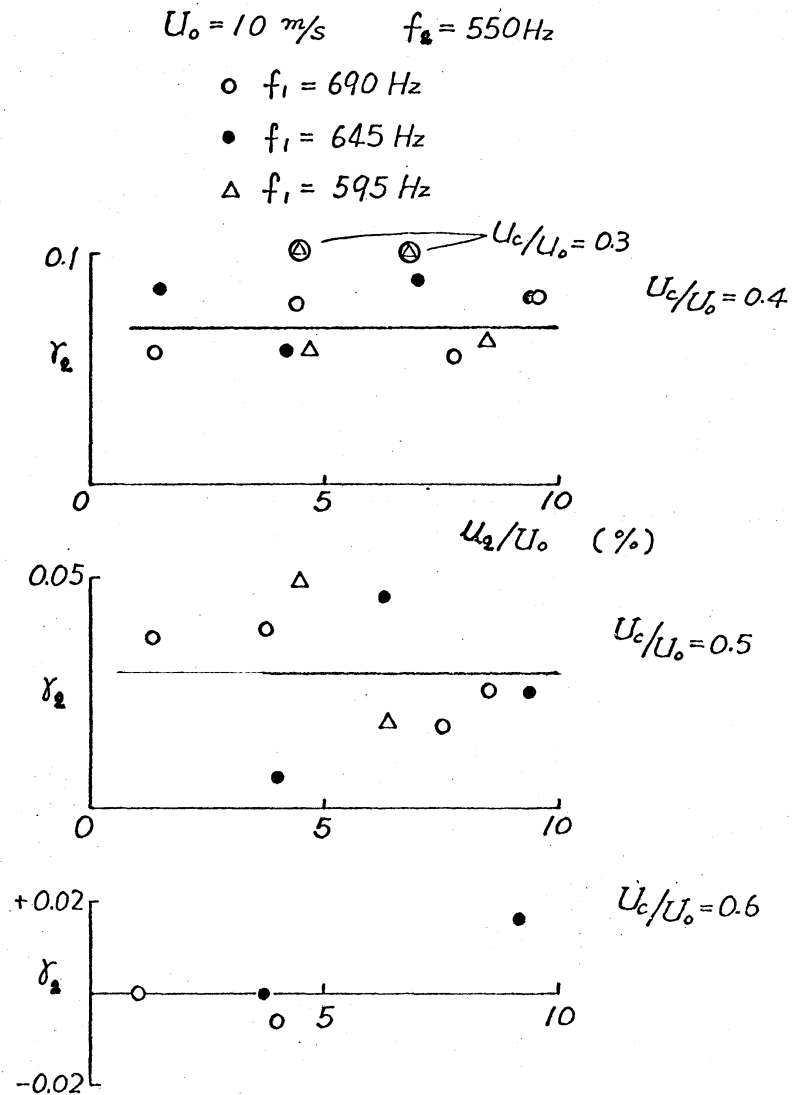
にはほとんど無関係で、 U_c/U_0 のみの函数のように見える。

このことは、はじめに述べた予想を裏書きするものである。第6図は γ_2 を U_c/U_0 に対してプロッ



トしたものである。破線は線型理論による成長率で、非線型成長率はそれより低い。丸印は音として f_2 だけを与えたときの成長率で、 U_c/U_0 が小さいときは線型成長率に近い。 U_c/U_0 が小さいということは与えた攪乱が弱いことに対応するからほ

ほぼ線型成長をしているわけである。



※5図 成長率

$$f_1 = 595, 645, 690 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 550 \text{ Hz} \quad \circ : f_2 \text{ ONLY}$$

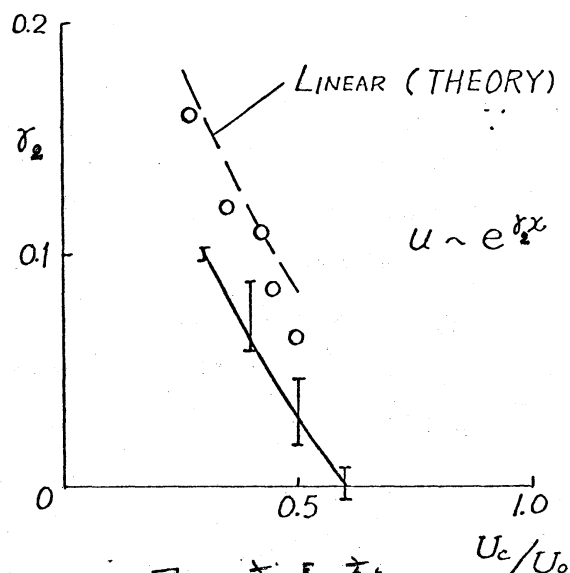


図 6 成長率

3. 第2次波の成長

f_1 と f_2 の成分の干渉によって作られる $f_1 \pm f_2$ 成分を第2次波と呼ぼう。その発生、成長は第1次波とはちがって、 u_1 と u_2 の直接干渉を伴うであろう。

第7図は2つの波 u_1 , u_2 の強さがかなりちがうとき $x = 27.5 \text{ mm}$ において観測された $f_1 - f_2$ 成分の波の強さ u_{12} である。これを第8図の $u_1 \approx u_2$ の結果と比べれば $f_1 - f_2$ 成分は弱い。第9図は u_{12} の流れ方向への成長のありさまで、主流速度の2%以下においてはほぼ指数的に成長している。そこで $x = 27.5 \text{ mm}$ における値そのもので成長率を代用して、 u_1 , u_2 成分の強さ

との関係を調べる。

第2次波が第1次波の2乗的非線型性

$(u_1 + u_2)^2$ で発生するとすれば、 $2u_1u_2$ の項がそれに相当する。故に作られる第2次波の振巾は u_1u_2 に比例するであらう。

そこで u_{12}/u_1u_2 と

いう量をいろいろな強さの u_1, u_2 についてとってみたのが第10図である。すべての振巾は U_0 で無次元化されており、倍数は省略されているが、これでわかることはこの値は u_1 や u_2 の大きさには無関係にほぼ一定である。

一方、エネルギーの見地からすれば $u_1^2 + u_2^2$ という第1次波のエネルギーで u_{12}^2 というものが作られるわけだから、変換効率のような量、 $u_{12}^2 / (u_1^2 + u_2^2)$ をとってみたのが第11図である。こ

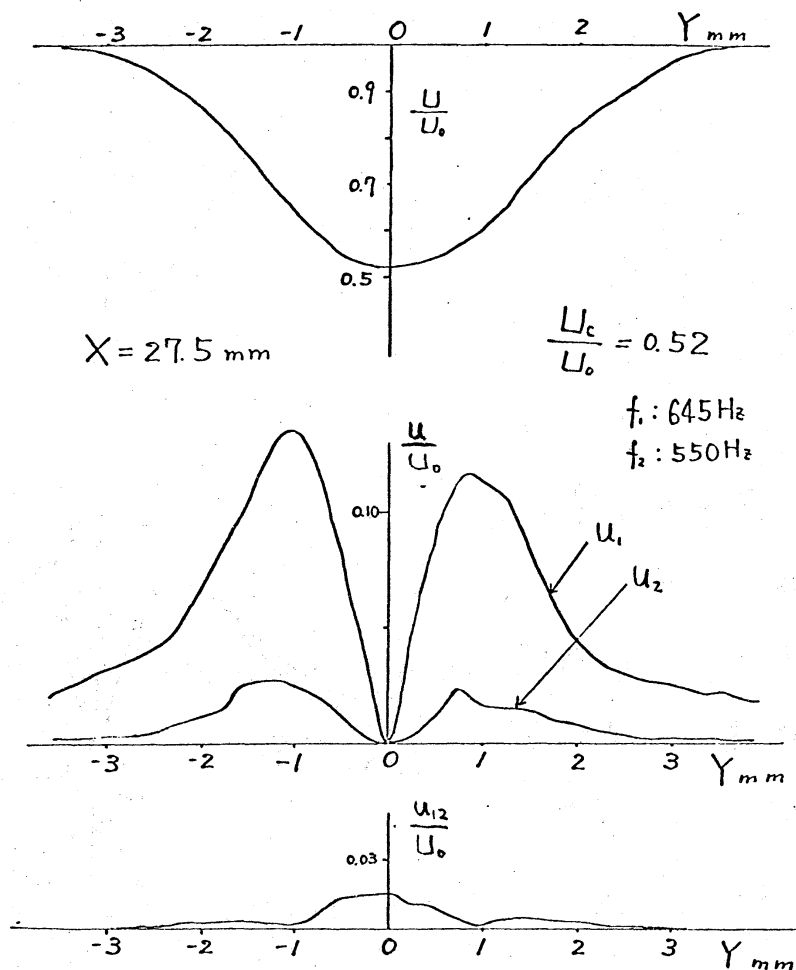
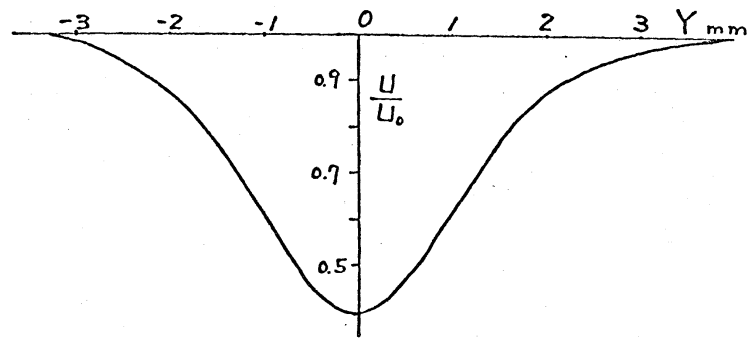


図7 差成分の発生

こでも倍数は省略されているが、この値は u_1 と u_2 によって大きく異っており、 $u_1^2 + u_2^2$ が大きい程（原点から遠い程）大きい。 u_1 、 u_2 が小さければ非線型干渉は生じないのだからこのことは当然である。また、同じ $u_1^2 + u_2^2$ では



$$X = 27.5 \text{ mm}$$

$$\frac{U_c}{U_0} = 0.4$$

$$f_1: 645 \text{ Hz}$$

$$f_2: 550 \text{ Hz}$$

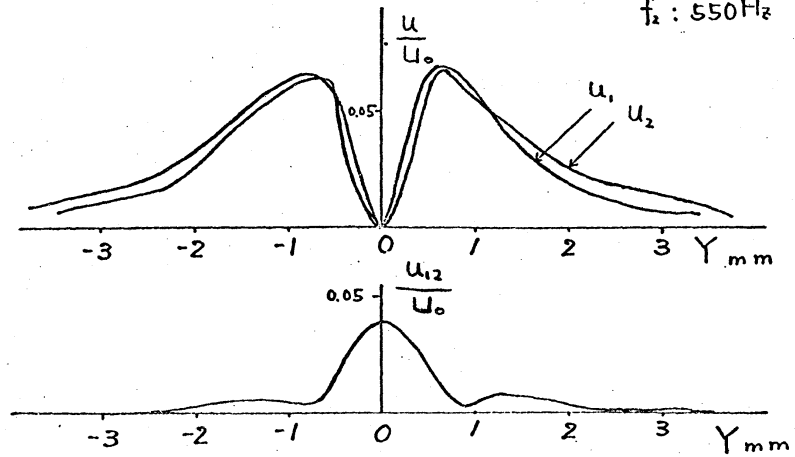
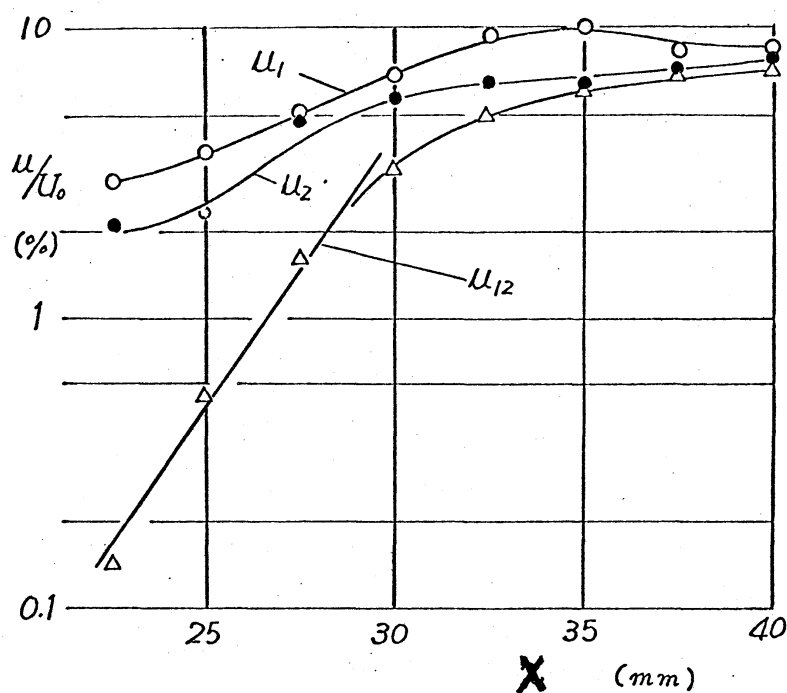


図8 差成分の発生

（原点を中心とした円周上） $u_1 = u_2$ の直線の近くに最大があり、それからはずれるにつれて減少している。即ち、 $f_1 - f_2$ 成分の発生には $u_1 \approx u_2$ が最も有効なことがわかる。

このようなことは f_1 を変えた別の実験によっても確かめられており、かなり一般性の高い結論である。

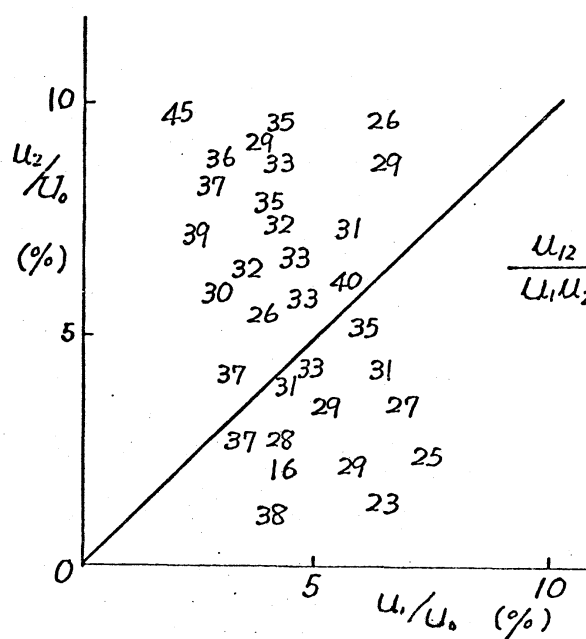


※9 図

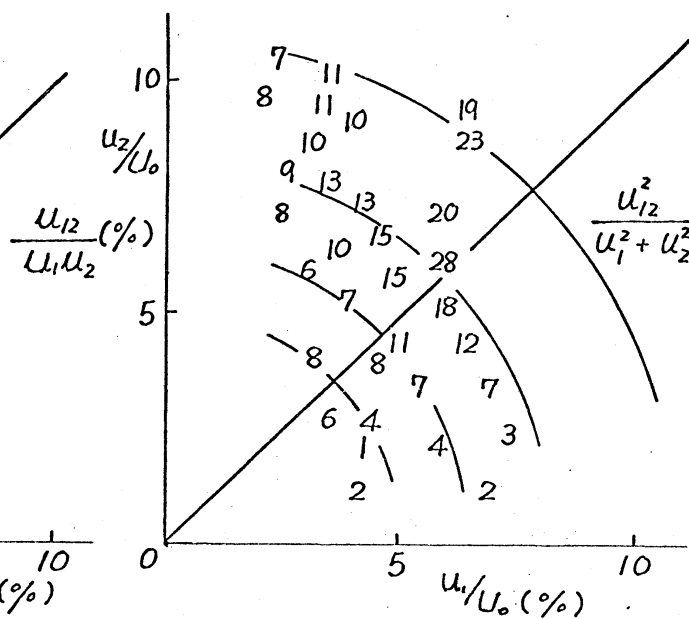
差成分の発達

$$f_1 = 645 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 550 \text{ Hz}$$



※10 図 差成分振中



※11 図 差成分エネルギー

$$x = 27.5 \text{ mm}$$

$$f_1 = 645 \text{ Hz}, \quad f_2 = 550 \text{ Hz}$$

4. 偶然化過程の解釈

非線型干渉によって $f_1 - f_2$ 成分が作られる素過程とは後流における層流から乱流への遷移、即ち速度変動の偶然化に対して決定的な重要性を持っている。

一般的に線型成長は選択的であって、波数がある特定の中にある変動のみが成長する。従って線型領域の“出口”における変動の波形は正弦波に近い。即ち、エネルギー・スペクトルは狭い範囲に局限される。偶然化はこのエネルギー・スペクトルのスペクトル空間における拡散にほかならない。この拡散のありさまを調べるために1つの正弦波音を入れる。この周波数成分は線型領域では成長し、非線型領域では、同じく成長してきた自然変動（風洞の中に残留する極めて弱い偶然変動）と干渉する。両方とも狭い線型成長の“窓”を通過してきているから両方の変動の差の周波数は低く、それによってエネルギー・スペクトルの低波数領域が形成される。従って、さきに述べたスペクトル空間における拡散の第1段階はある波数領域のスペクトル中が広がっていくという形ではなく、低波数領域の出現である。

第12図はエネルギー・スペクトルの例で黒丸で示される線スペクトルの調和成分の群と、それを囲む白丸の連続スペクトル及び $10 m^{-1}$ の低波数成分が見られる。この低波数成分

が線スペ
クトルと
連続スペ
クトルの
周波数の
差の成分
であるこ
とは連続
スペクト
ルと低波
数スペク

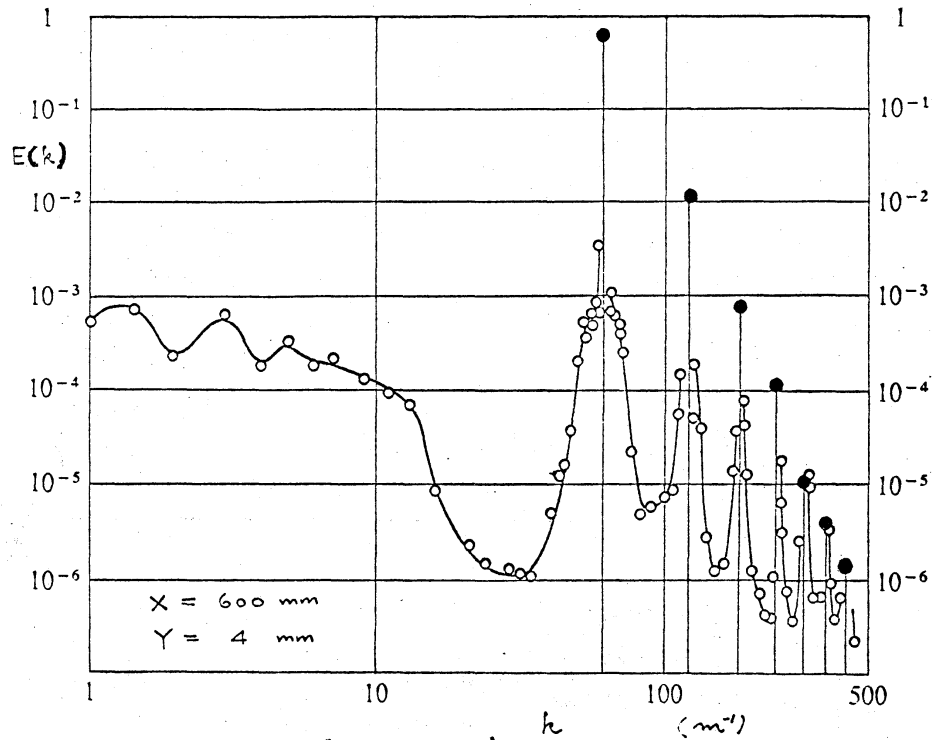


図12図 スペクトル

トルとの測定と比較で確かめられる。即ち、第13図に示したように両方はほぼ完全に一致する。この低波数成分創出のプロセスは振巾変調されたラジオ波を検波（非線型増幅）して変調波である可聴音を取り出すプロセスに対応している。

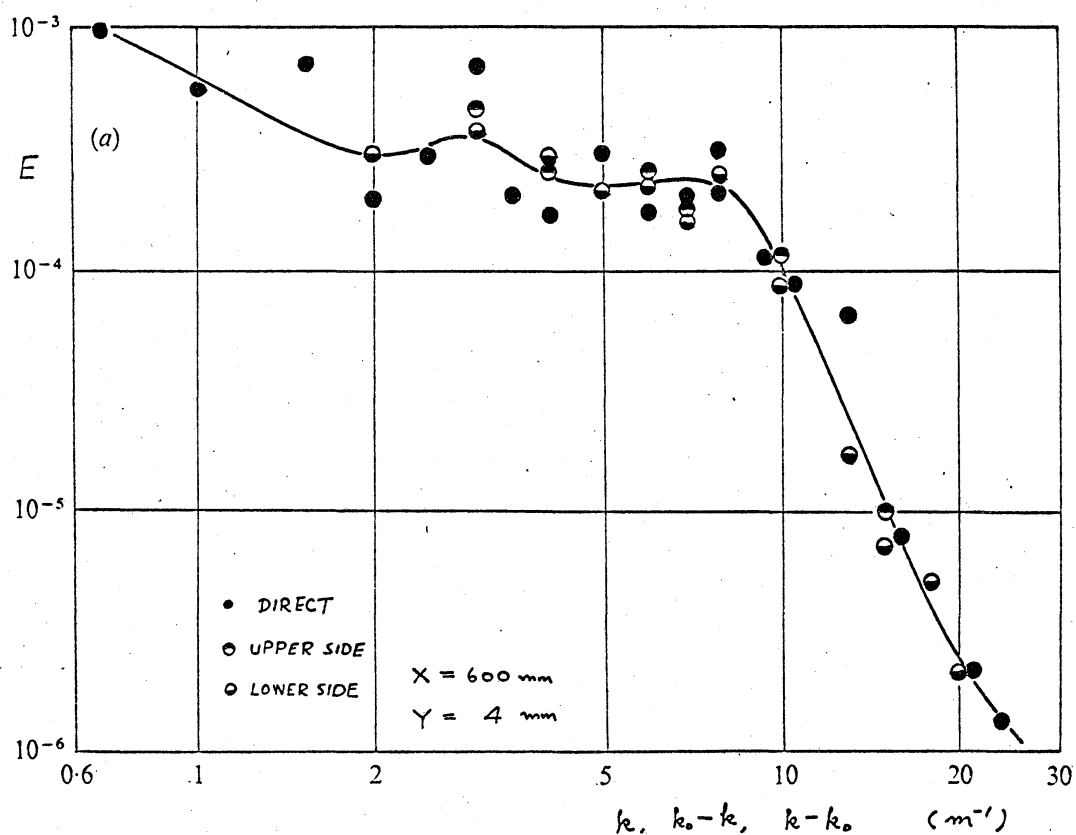


図13 低波数部スペクトル

5. おわりに

2つの波の相互干渉という簡単な場合の実験を行い、その特徴を明らかにした。そして偶然化過程との関連を議論した。更に複雑な干渉を調べることによって偶然化のより詳細な記述が可能となるであろう。

参考文献

1. Sato, H. An experimental study of non-linear interaction of velocity fluctuations in the transition region of a two-dimensional wake.
J. Fluid Mech. 44 741 (1970)
2. Sato, H. and Onda, Y.
Detailed measurements in the transition region of a two-dimensional wake.
Report 453, Inst. Space. Aero. Sci. Univ. Tokyo (1970)
3. Sato, H. and Saito, H.
Fine-structure of energy spectra of velocity fluctuations in the transition region of a two-dimensional wake.
J. Fluid Mech. 67 539 (1975)